Polya定理

信科08级 张弛00848231

基本概念：置换

- 一个2*N的变换矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

- 置换运算：连接运算,满足结合律

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

基本概念：群

- 群G是一个元素集合和G上的二元运算$\oplus$
- 满足以下性质：
- 封闭性：若存在 $a,b\in G$，那么$a\oplus b\in G$
- 结合律：$(a\oplus b)\oplus c=a\oplus(b\oplus c)$
- 单位元：存在$e\in G$，对于任意 $a\in G$ 都满足

$$a\oplus e=e\oplus a=a$$

- 逆元素：对任意$a\in G$，存在 $b\in G$，使得

$$a\oplus b=e \text{ 记 } b=a^{-1}$$

置换群

- 以置换为元素的群，运算为连接运算
- 定义Z_k为在置换k的运算下不动的标记数

$$Z_{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}} = 4 \quad Z_{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}} = 2$$

- 定义C_k为在置换k的运算下循环总数

$$C_{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 2 & 3 & 4\end{pmatrix}} = 4 \quad C_{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4\\1 & 3 & 2 & 4\end{pmatrix}} = 3$$

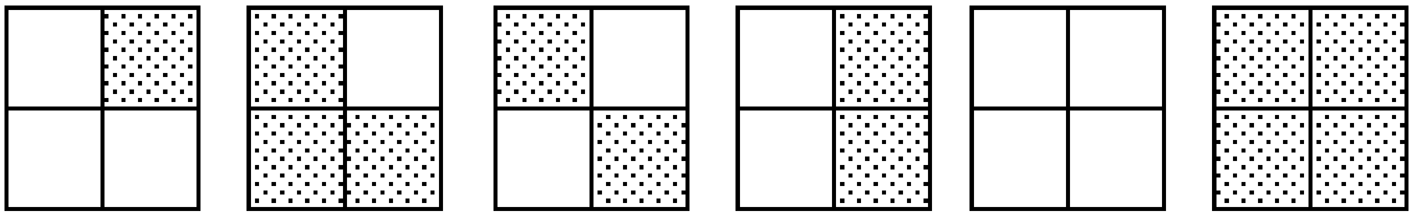
Burnside引理

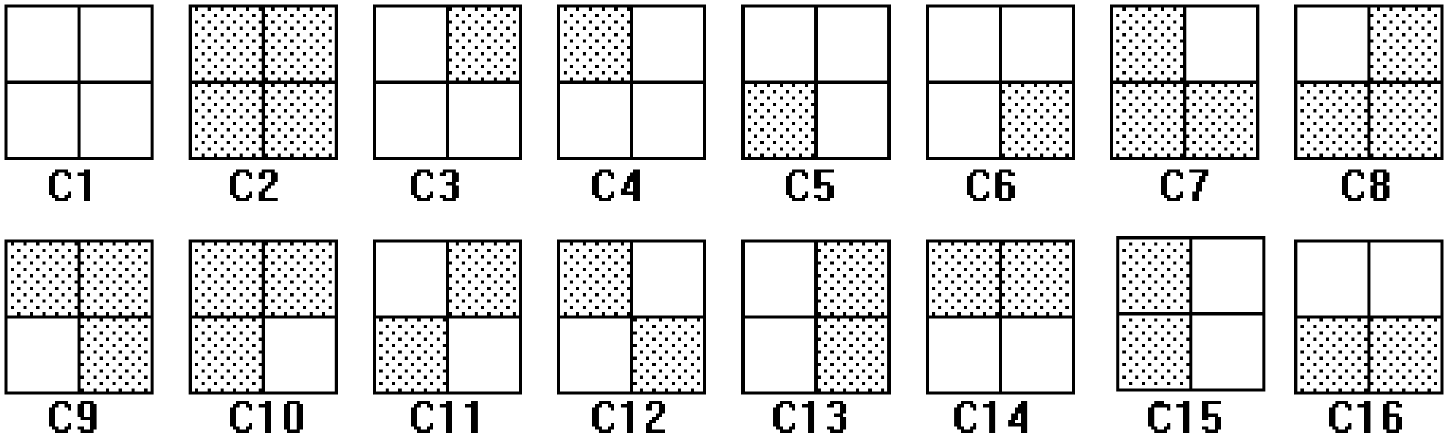
- 设$G=\{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{|G|}\}$是$N=\{1, 2, 3 \ldots, N\}$上的置换群，$G$在$N$上可引出不同的等价类，其不同的等价类个数为

$$l = \frac{1}{|G|}\left[Z_{a_1} + Z_{a_2} + Z_{a_3} \ldots. + Z_{a_{|G|}} \right]$$

实例

- 给一个2*2的矩阵进行黑白染色，如果染色方案a可以通过旋转以后得到b，那么我们认为他们是相同的，求一共有多少种不同的染色方案。





$$a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}$$

$$a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 & 10 & 7 & 8 & 9 & 12 & 11 & 16 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}$$

$$a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 9 & 10 & 7 & 8 & 11 & 12 & 15 & 16 & 13 & 14 \end{pmatrix}$$

$$a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 10 & 7 & 12 & 11 & 14 & 15 & 16 & 13 \end{pmatrix}$$

$$Z_{a_1} = Z_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix}} = 16$$

$$Z_{a_2} = Z_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 6 & 3 & 4 & 5 & 10 & 7 & 8 & 9 & 12 & 11 & 16 & 13 & 14 & 15 \end{pmatrix}} = 2$$

$$Z_{a_3} = Z_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 5 & 6 & 3 & 4 & 9 & 10 & 7 & 8 & 11 & 12 & 15 & 16 & 13 & 14 \end{pmatrix}} = 4$$

$$Z_{a_4} = Z_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 \\ 1 & 2 & 4 & 5 & 6 & 3 & 8 & 9 & 10 & 7 & 12 & 11 & 14 & 15 & 16 & 13 \end{pmatrix}} = 2$$

$$l = \frac{1}{|G|}\left[Z_{a_1} + Z_{a_2} + Z_{a_3} \dots + Z_{a_{|G|}} \right]$$

$$= \frac{16+2+4+2}{4} = 6$$

思考题

- 求将1~3填到一个圆圈上不同的方案数
- 将一个1*3的格子黑白染色的不同方案数

Polya定理

- 设$G=\{a_1, a_2, a_3 \ldots, a_{|G|}\}$是$N=\{1, 2, 3 \ldots, N\}$上的置换群，现用$m$种颜色对这$N$个对象进行染色，其不同的染色方案为

$$l=\frac{1}{|G|}\left[m^{C_{a_1}}+m^{C_{a_2}}+m^{C_{a_3}} \ldots .+m^{C_{a_{|G|}}}\right]$$

回到例题

- 我们需要染色的对象是4个格子，所以置换是针对于这4个格子而言

转0度 $a_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

转90度 $a_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

转180度 $a_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

转270度 $a_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

1	2
3	4

$$C_{a_1} = C_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}} = 4$$

$$C_{a_2} = C_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}} = 1$$

$$C_{a_3} = C_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}} = 2$$

$$C_{a_4} = C_{\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}} = 1$$

$$l = \frac{1}{|G|}\left[m^{C_{a_1}} + m^{C_{a_2}} + m^{C_{a_3}} \ldots\ldots + m^{C_{a_{|G|}}} \right]$$

$$= \left(2^4 + 2^1 + 2^2 + 2^1\right) \Big/ 4 = 6$$

思考题

- 对3*3的矩阵进行黑白染色，方案数？
- 对2*2的矩阵进行黑白染色，旋转，左右、上下翻转后相同的认为方案一样，方案数？

SGU 294 He’s Circle

- 将一个含有N个珠子的项链黑白染色
- 如果通过旋转相同那么认为一样
- 求一共有多少染色法
- $N <= 200000$

置换群的构造

- 简单的情况下，全部变化规则放到一起，直接构成置换群
- 但是一般情况下，上述情况并不存在
- 注意，置换的连接操作不满足交换律
- 若初始只有两个不同的置换a和b，那么根据封闭性，$a \oplus b, b \oplus a \in G$ 然后继续根据封闭性

$$
\begin{gathered}
a \oplus (a \oplus b), a \oplus (b \oplus a), \\
(a \oplus b) \oplus a, (b \oplus a) \oplus a, \\
b \oplus (a \oplus b), b \oplus (b \oplus a) \ldots\ldots
\end{gathered}
$$

SGU 208 Toral Ticket

- 给出一张纸，上面有$M * N$个格子，每个格子可以涂黑色或者白色
- 现在对于一张纸，我们先把他的长的那一边粘起来，然后这个纸就成了一个圆柱状，然后再把这个圆柱首尾相连，这样就粘出了一个“环”
- 求一共有多少种本质不同的纸可以粘出不同的这样的环

题目分析

- 把同一张纸上的所有位置按一个(Dx,Dy)的向量全部移动一次，产生的环肯定相等
- 把这张纸旋转180度，产生的环肯定相等
- 当 $N=M$ 时，旋转90、270度，也相等

题目分析

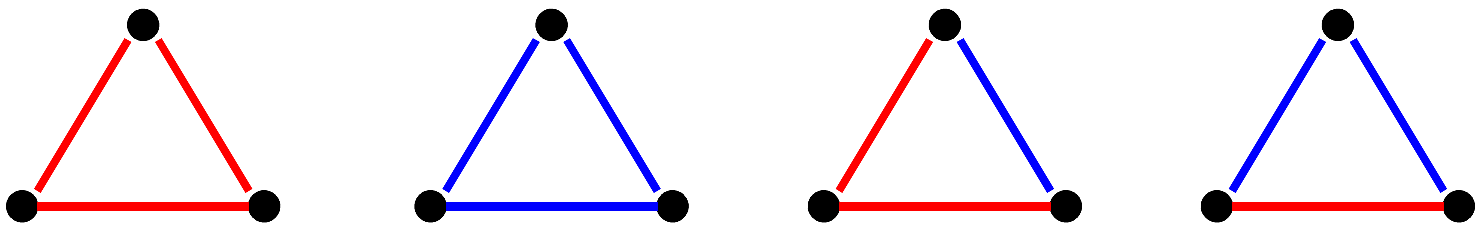
- 但是我们会发现，如果直接把移动的置换和旋转的置换放在一起，他们是不满足封闭性的
- 需要连接置换：枚举移动向量(Dx,Dy)和翻转角度，新置换为【移动】+【翻转】
- 可验证这样的置换满足置换群性质。

作业

- POJ 2409 Let it Bead
- SGU 208 Toral Ticket
- SGU 294 He’s Circle (时限较严，若实在不能AC，不严格要求)
- 学有余力的同学，可以挑战一下自己

SGU 282 Isomorphism

- 给一个N个节点的无向完全图
- 用m个颜色给每条边进行染色
- 求本质不同的方案数



题目分析

- 点对应关系确定边对应关系
- 点置换→边置换
- 基本思路：枚举点置换，算出对应的边置换
- 复杂度：$O(N!)$

进一步观察

- 观察两个点置换

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (2,3) \\ (2,1) & (2,3) & (1,3) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} (1,2) & (1,3) & (2,3) \\ (1,3) & (1,2) & (3,2) \end{pmatrix}$$

- 结构相同的点置换→循环数相同的边置换

分析结构

- 一个点置换的结构描述：$L_1 \le L_2 \le L_3 \ldots \le L_K$
- 满足 $L_1 + L_2 + L_3 \ldots + L_K = N$
- 当$N = 53$时，本质不同的点置换结构不到300000
- 可以通过搜索得出

确定边置换

- 得到确定的点置换结构 $L_1 \le L_2 \le L_3 \ldots \le L_K$ 后，计算边置换的循环数

- 第一类边：端点在不同的点循环L_i和L_j内，一个循环覆盖$LCM\,(L_\mathrm{i}, L_\mathrm{j})$条边，一共$L_\mathrm{i} * L_\mathrm{j}$条边，所以循环数为

$$\frac{L_i \times L_j}{LCM\,(L_i, L_j)} = \frac{L_i \times L_j}{L_i \times L_j \big/ \gcd(L_i, L_j)} = \gcd(L_i, L_j)$$

确定边置换

- 第二类边：两端点在同一个循环L_i内
- 分奇偶讨论：
- L_i是奇数，每个循环覆盖L_i条边，一共$C(L_i, 2)$条边，所以循环数为

$$\frac{C(L_i,2)}{L_i}=\frac{L_i\times(L_i-1)/2}{L_i}=\frac{L_i-1}{2}$$

- L_i是偶数，一个特例：覆盖$L_i/2$条边的循环

$$\frac{C(L_i,2)-L_i/2}{L_i}+1=\frac{L_i\times(L_i-2)/2}{L_i}+1=\frac{L_i}{2}$$

小结

- 得到确定的点置换结构 $L_1 \le L_2 \le L_3 \ldots \le L_K$ 后，边置换的循环数为

$$C = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{L_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \gcd(L_i, L_j)$$

统计目标

- 实际$N!$个点置换中，有多少个 $L_1 \le L_2 \le L_3 \ldots \le L_K$ 结构呢？
- 一个循环看成一个圆排列，现在要把N个人分配到k个长度分别为 $L_1 \le L_2 \le L_3 \ldots \le L_K$的独立不相关圆排列中
- 因为有 $L_i = L_{i+1}$ 的情况，设B_i为有多少个L_j=i
- 总分配数为

$$S = \frac{N!}{L_1 \times L_2 \times \ldots L_k \times B_1! \times B_2! \times \ldots B_k!}$$

最终总结

- 通过搜索，确定点置换长度 $L_1 \le L_2 \le L_3 \ldots \le L_K$
- 点置换长度确定，计算满足该特征的个数

$$S = \frac{N!}{L_1 \times L_2 \times \ldots L_k \times B_1! \times B_2! \times \ldots B_k!}$$

- 计算该特征点置换引导出的边置换循环数

$$C = \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor \frac{L_i}{2} \right\rfloor + \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^{k} \gcd(L_i, L_j)$$

- 记入答案 $Ans = Ans + S \times m^C$